$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$
$P(S)=1$
$E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j,\ P(U\, E_i) = \sum P(E_i)$
$E \cap F = \emptyset$: eventi disgiunti
$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \quad (E \cap F)^c = E^c \cup F^c$ De Morgan
$P(E^c) = 1 - P(E)$
$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
Eventi indipendenti $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$; $P(E|F) = P(E)$

$$1 = P(S) = Np \qquad P(E) = \frac{|E|}{N}$$

Principio di enumerazione: Se ci sono due esperimenti, con rispettivamente *m* ed *n* esiti differenti, allora complessivamente ci sono *mn* risultati se si considerano gli esperimenti contemporaneamente. **Conseguenza:** il numero di *permutazioni* di *n* elementi è *n!*

Coefficiente binomiale: numero di *combinazioni* di *n* elementi presi *r* alla volta.

Determinare il numero di diversi gruppi di *r* oggetti che si possono formare da un insieme di *n*.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}$$

Probabilità condizionata

$P(E|F) := \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
$P(E|F) = 1 - P(E^x|F)$

Fattorizzazione di un evento e formula di Bayes

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$
$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$
$= P(E|F)\, P(F) + P(E|F^c)\, P(F^c)$
$= P(E|F)\, P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]$

Generalizzazione

$\cup F_i = S \quad F_i\, disgiunti \qquad E = \cup(E \cap F_i) \quad i = 1, \ldots, n$

Formula di fattorizzazione

$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E | F_i) P(F_i)$

Formula di Bayes

$P(F_j|E) = \frac{P(F_j \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)}$

Eventi indipendenti $\quad P(E) = P(E|F) : P(E \cap F) = P(E)P(F)$

Variabili aleatorie

Funzione di ripartizione

$X \sim F \quad F(x) := P(X \leqslant x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$
$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x)$

Variabili aleatorie discrete

Funzione di massa di probabilità

$p(a) := P(X=a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \qquad F(a) = \sum_{x \leqslant a} p(x)$

Variabili aleatorie continue

$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$

$1 = P(X = a) = 0 \qquad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

$F(a) := P(X \in (-\infty, a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{d}{da} F(a) = f(a)$ ovvero la densità è la derivata della funzione di ripartizione.

Coppie di variabili aleatorie

$F(x, y) := P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \quad F_X(x) = F(x, \infty) \quad F_Y(y) = F(\infty, y)$
$p_{X|Y}(x|y) := P(X = x|Y = y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \qquad f_{X|Y}(x, y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Distribuzioni di probabilità notevoli

Uniforme discreta: *U(n) n* valori equiprobabili

$$p(x) = \frac{1}{n} \qquad F(x) = \frac{x}{N}$$

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \frac{b-a}{n}$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \qquad Var[X] = \frac{n^2+1}{12}$$

Bernoulli: un esperimento con esito 0/1

$p(X=1) = p \qquad p(X=0) = 1-p$
$E[X] = p \qquad Var[X] = p(1-p)$

Binomiale: `Be(n,p) n` `ripetizioni di un esperimento bernoulliano`

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad E[X] = np \quad Var[X] = np(1-p)$$

Geometrica: `numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, in` $[1, \infty]$

$$p(x) = p(1-p)^{x-1} \qquad E[X] = \frac{1}{p} \qquad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Poisson: $Po(\lambda)$ `Approssima la Binomiale per un elevato numero di prove a bassa probabilita`. n > 50, np < 5`

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad E[X] = V[X] = \lambda$$

Uniforme: *U(a, b)*

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F(X) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normale o Gaussiana: $N(\mu, \sigma^2)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad P(X \leqslant c) = P\left(Z \leqslant \frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

Esponenziale: $\exp(\lambda)$ Intervallo di tempo tra due eventi successivi. Assenza di memoria.

$$f(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$
$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
$E[aX] = aE[X]$
$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \quad SSE\ indipendenti$
$E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p(x) \qquad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\,dx$
$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \quad dove \quad E[X^2] := \sum_i i^2 P(X = i)$
$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$
$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2\mathrm{Cov}(X, Y)$
$Var(aX+b) = a^2 Var(x)$
$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
$Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
$Cov(X, X) = Var(X)$
$Cov(aX, Y) = aCov(X, Y) = Cov(X, aY)$

Disuguaglianza di Markov

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E[X]}{a} \qquad \forall\, a > 0$$

Disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|X-\mu| \geqslant r) \leqslant \frac{\sigma^2}{r^2}$$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Media campionaria

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$E[\bar{X}] = \mu \quad Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Th. limite centrale

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\rightarrow \frac{(\sum X_i) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

Stimatori di massima verosimiglianza

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \Theta)$

Bernoulli, Poisson

$$\frac{1}{n} \sum X_i$$

Normale

$$\bar{X}, \sqrt{\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Intervalli di confidenza

$$1-\alpha :\rightarrow \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \qquad \left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left|\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| \leqslant z_{1-\alpha/2} \text{ accetto } H_0$$

$$\left|\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| > z_{1-\alpha/2} \text{ rifiuto } H_0$$

	Rifiuto H0	Accetto H0
H0 Vera	Err. 1A specie	
H0 Falsa		Err 2a specie

$$\alpha = P(err.\ 1^a\, specie) = P_{mu0}(|\bar{X} - \mu_0| > c)$$

$$\beta(\mu) = P_\mu\left(-z_{1-\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{1-\alpha/2}\right)$$

	0,10	0.05	0.01	0.005	0,001
1coda	∓1,28	∓1,64	∓2,33	∓2,58	∓2,88
2code	∓1,64	∓1,96	∓2,58	∓2,81	∓3,08