

GRAFII NON ORIENTATI: $G=(V,E)$, $0 \leq |E| \leq |V|(|V|-1)/2$

CAMMINO: sequenza di vertici x_1, x_2, \dots, x_n distinti e collegati al successivo.

CIRCUITO: cammino in cui il vertice di partenza e di arrivo coincidono.

GRAFO CONNESSO: esiste sempre un cammino che collega v_i a v_j

GRAFO COMPLETO (K_n): Ogni vertice è adiacente a tutti gli altri. $|E|=n(n-1)/2$

BIPARTITO COMPLETO: $K_{n,s}$

MODALITÀ DI RAPPRESENTAZIONE

Matrice di adiacenza: (quadrata $|V| \times |V|$, in posizione (i,j) inserisco 1 se esiste un arco che congiunge i vertici i,j .)

Matrice di incidenza: dim. $|V| \times |E|$ $M_{i,j} = 1$ se E_j entra in V_i , -1 se E_j esce da V_i , 0 altrimenti

SOTTOGRAFO

È un grafo formato da un sottoinsieme di vertici di un grafo più grande. Se due grafi sono isomorfi, lo sono anche i corrispondenti sottografi.

$G=(V,E), G^1=(V^1,E^1)$ $1) V^1 \subseteq V$ $2) E^1 \subseteq E$ $3) E^1 \subseteq V^1 \times V^1$

G^* è **SOTTOGRAFO INDOTTO** di G se: $1)$ è sottografo; $2) E^1 = E \cap (V^1 \times V^1)$

ISOMORFISMO

G_1 e G_2 sono **ISOMORFI** se esiste una corrispondenza biettiva tra l'insieme dei vertici di G_1 e quelli di G_2 , di modo che ogni coppia di vertici è adiacente in G_1 , se e solo se c'è una corrispondente coppia di vertici che sono adiacenti in G_2 .

Proprietà: 1) stesso num di vertici. 2) stesso num di spigoli. 3) stesso numero di vertici con lo stesso grado. 4) stessi sottografi indotti.

GRAFO COMPLEMENTARE

Sia $G=(V,E)$ un grafo, il suo complementare $G^c=(V,E^c)$, dove E^c sono tutti gli archi che non sono in G . Se due grafi sono isomorfi lo sono anche i loro complementari.

EDGE COUNTING

In ogni grafo $\sum gr(v) = 2E$

Inoltre il numero dei vertici di grado dispari è pari.

GRAFO BIPARTITO

$G(V_1, V_2; E)$ $0 \leq |E| \leq |V_1| |V_2|$

$1) V = V_1 \cup V_2$; $2) V_1 \cap V_2 = \emptyset$; $3) V_1, V_2 \neq \emptyset$; $4)$ gli estremi di ogni spigolo stanno in parti diverse.

Un grafo è bipartito SSE tutti i circuiti presenti sono di lunghezza pari.

GRAFO PLANARE

Può essere disegnato in modo che non ci sia sovrapposizione di archi.

Per trovare una rappresentazione planare di un grafo: 1)cerco un C.H. 2)disegno a cerchio 3)traccio gli spigoli mancanti.

Il numero di regioni è uguale in tutte le rappresentazioni planari del grafo.

FORMULA DI EULERO

Se G è un grafo planare connesso, allora ogni sua rappresentazione piana ha $r = e - v + 2$ regioni.

Corollario

se G è connesso e planare, $e > 1$, allora $e \leq 3v - 6$ (ma non viceversa!!!)

se G è connesso, planare e bipartito, $e > 1$, allora $e \leq 2v - 4$

TEOREMA DI KURATOWSKI

Un grafo è planare SSE non contiene una configurazione di $K_{3,3}$ o di K_5 .

TEOREMA DI EULERO

un multigrafo non orientato è euleriano sse tutti i suoi nodi hanno grado pari

GRADO DI UNA REGIONE: numero di gradi della frontiera. \sum gradi regione = $2e \geq 3r$

MULTIGRAFO: è un grafo con spigoli paralleli e cappi

TRAIL: è una sequenza di vertici $x_1, \dots, x_k \in V \setminus \{x_i, x_{i+1}\} \in E$ con x_1, \dots, x_k non necessariamente tutti distinti e (x_i, x_{i+1}) distinti.

CICLO: sequenza di archi connessi il cui vertice di partenza e fine coincidono, e un arco può apparire una sola volta. Un ciclo è un trail chiuso.

CICLO DI EULERO: Ciclo che contiene tutti gli archi del grafo e visita ogni vertice almeno una volta.

TEOREMA: un multigrafo ha un ciclo di Eulero SSE è connesso e ha tutti i vertici di grado pari.

Corollario: un multigrafo ha un trail euleriano, ma non un ciclo di Eulero, SSE è connesso e ha esattamente 2 vertici di grado dispari.

TRAIL EULERIANO: trail che contiene tutti gli spigoli esattamente una volta.

GRAFO EULERIANO: se non contiene cicli di lunghezza dispari.

TEOREMA: Un multigrafo G ha un trail euleriano, ma non un ciclo SSE G è connesso e ha esattamente 2 vertici di grado dispari.

GRAFO HAMILTONIANO: è un grafo che contiene un ciclo di Hamilton.

CIRCUITO HAMILTONIANO: è un circuito che passa per ogni vertice esattamente una e una sola volta.

PROPRIETÀ

Rule 1. Se un vertice x ha grado 2, entrambi gli archi incidenti in x devono appartenere al circuito hamiltoniano.

Rule 2. *No proper subcircuit, that is, a circuit not containing all vertices, can be formed when building a Hamilton circuit.*

Rule 3. *Once the Hamilton circuit is required to use two edges at a vertex x , all other (unused) edges incident at x can be deleted.*

Proprietà: 1) se $n=|V|$, ogni C.H. ha n spigoli; 2) se esiste C.H., G è connesso; 3) se esiste C.H., $gr(v) \geq 2$ per ogni $v \in V$.

Come trovare un C.H.: (1) se c'è un vertice di grado 1 NON esiste un C.H. (2) se G non è connesso allora NON esiste C.H. (3) se $gr(v) = 2$, uso due spigoli incidenti in v per creare C.H. (4) un C.H. non può contenere sottocircuiti (5) se ho scelto 2 spigoli incidenti in u , tutti gli altri \notin al circuito.

TEOREMI

DIRAC

Un grafo connesso con $n > 2$ vertici, ha un circuito hamiltoniano se il grado di ogni vertice è almeno $n/2$.

CHVATAL

G non orientato, $n=|V|$, $V=\{x_1, \dots, x_n\}$, $gr(x_i) \leq gr(x_{j+1})$.

Se $gr(x_1) > 1$, $gr(x_2) > 2, \dots, gr(x_k) > k$ con $k=1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \rightarrow \exists C.H.$

TEOREMA 3

G planare e con un circuito hamiltoniano

$\sum_i (i-2)(r_i - r'_i) = 0$

r_i : regioni all'interno del C.H. delimitate da i archi

r'_i : regioni all'esterno del C.H. delimitate da i archi

IPERCUBO: 2^n vertici di grado n e $2n$ facce. distanza $(u,v) \leq n$, diametro = $\max\{\text{dist}(u,v)\}$

NODE COLORING: colorazione dei vertici: per verificare che il numero cromatico è k dimostriamo che G non è $(k-1)$ -colorabile. G con un sottografo K_n ha bisogno di almeno n colori.

CONNETTIVITÀ: $\lambda(G)$ connett. sugli spigoli minimo numero di spigoli da togliere per trasformare G in un grafo sconnesso $k(G)$ (connett. sui vertici) minimo numero di vertici per... $\delta(G)$ grado minimo $\Delta(G)$ grado massimo

EDGE CUTSET (taglio)

$S \subseteq E$ t.c. $1 - G(V, E \setminus S)$ e' sconnesso $2 -$ togliendo alcuni spigoli di S , ma non tutti, il grafo rimane connesso

$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \frac{2E}{V}$ per connettività ottima le relazioni sono =

$K_n, n \geq 2, k(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n - 1$

NUMERO CROMATICO: $X(G)$ = numero minimo di colori.

Proprietà: (1) $X(G) \leq |V|$; (2) $X(G) \geq \underline{w}(G)$ = num di vertici del più grande sottografo completo di G

TEOREMA DI BROOKS

se G non è né un grafo completo K_n , né un circuito dispari, allora $X \leq d$, dove d è il grado massimo del grafo. Altrimenti $X = d + 1$.

TEOREMA 3

Per ogni $k > 0$, esiste sempre un grafo privo di triangoli G , con $X = k$.

TEOREMA DI VIZING

Se il grado massimo di un vertice in un grafo G è d , allora $X' = d$ oppure $X' = d + 1$.

X' è la colorabilità degli archi. $X \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$

TEOREMA DEI 4 COLORI

ogni G planare è 4-colorabile. Se invece non è planare $X \leq d + 1$.

$P_k(G)$ è il num di modi diversi in cui il grafo si può colorare usando esattamente k colori. Se $k < X(G)$ non si può colorare G , e $P_k(G) = 0$. Posso calcolare $P_k(G)$ come $P_k(G_{(x,y)}) + P_k(G_{(x,y)})$.

TEOREMA: x, y adiacenti, allora $P_k(G) = P_k(G_{(x,y)}) + P_k(G_{(x,y)})$

EDGE COLORING: colorazione spigoli

$\Delta \leq X \leq |E|$

GRAFII ORIENTATI: $G=(N,E)$ è quella struttura in cui gli spigoli hanno un verso di percorrenza. Nel caso di grafo orientato non si parlerà più di spigoli ma di archi e la coppia (u,v) è formata da un estremo iniziale ed un estremo finale.

G FORTEMENTE CONNESSO:

se $\forall u, v \in N \exists$ un cammino che va da un qualsiasi u ad un qualsiasi v

GRADO ENTRANTE: $\text{indeg}(v) = |\{aeA \text{ con } v \text{ come nodo finale}\}|$

GRADO USCENTE: $\text{outdeg}(v) = |\{aeA \text{ con } v \text{ come nodo iniziale}\}|$

$0 \leq |A| \leq |N|(|N|-1)$

ISOMORFI: 1)stesso num nodi; 2)stesso num archi; 3)stesso num vertici con stesso indeg e outdeg ; 4)stessi sottografi indotti.

TEOREMA DI EULERO: G multigrafo orientato ha un C.H. SSE (1) è fortemente connesso ; 2) $\text{indeg} = \text{outdeg}$ per ogni v

ALBERI NON ORIENTATI

Sono grafi non orientati, connessi e senza cicli. Scelgo un vertice qualsiasi come radice. Ho un solo cammino che collega una coppia di vertici. Grazie ai livelli è possibile sapere la distanza di un vertice dalla radice.

$|E| = |V| - 1$ per ogni albero.

TEOREMA

T connesso, sono equivalenti: (1) T non ha circuiti ; (2) $\forall v, u \in V \exists$ un unico cammino che collega u e v ; (3) G è **MINIMALMENTE CONNESSO**, cioè diventa sconnesso togliendo uno spigolo qualsiasi.

TEOREMA: un albero con n vertici ha $n-1$ spigoli.

FORESTA: albero le cui componenti connesse sono alberi.

ALBERI ORIENTATI

Sono grafi orientati con un vertice fissato r come radice in cui esiste un unico cammino orientato dalla radice a qualsiasi vertice. Ho padri e figli, se $\text{outdeg}(v) = 0$ v è una foglia altrimenti è un nodo interno. l = num di foglie, i = num nodi interni.

$i+l=n=|V|$

ALBERI M-ARIO

Sono alberi orientati in cui tutti i vertici interni hanno m figli

TEOREMA: se G è M-ario, $n = mi + 1$. i vertici interni.

COROLLARIO

$n = i + l$ vertici.

(a) Dato $i, l = (m-1)i + 1 ; n = mi + 1$

(b) Dato $l, i = (l-1)/(m-1) ; n = (ml-1)/(m-1)$

(c) Dato $n, i = (n-1)/m ; l = [(m-1)n + 1]/m$

Se $m=2$ e ci sono tutte le foglie, $l=i-1$

Se le foglie sono tutte o nell'ultimo o nel penultimo livello, allora l'albero è **BILANCIATO**.

TEOREMA: G albero M-ario, h altezza, $l = \#$ foglie allora:

1) $l \leq m^h$; e se tutte le foglie sono a altezza h , $l = m^h$;

2) $h \geq \lceil \log_m(l) \rceil$; e se G bilanciato $h = \lceil \log_m(l) \rceil$

TEOREMA

ci sono n^{n-2} alberi non orientati in n oggetti.

ALBERO RICOPRENTE: sia $G(V,E)$ e sia $T(V,E')$ con $E' \subseteq E$

PRINCIPIO DI ADDIZIONE:

se ho un insieme con r_1 elementi, fino a un insieme r_m con m elementi, se $1, \dots, m$ sono disgiunti, allora $r_1 + \dots + r_m$ è il num di modi in cui posso scegliere un elemento da tutti gli insiemi.

PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE

Supponiamo che una procedura possa essere spezzata in m fasi successive (ordinate), con r_i come risultato della fase i -esima. Se il numero dei risultati di ogni fase è indipendente dalle scelte effettuate nelle fasi precedenti e i risultati composti sono tutti distinti, allora in totale ci sono $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_m$ risultati.

= **coefficiente binomiale**

PERMUTAZIONI: sono tutti i modi in cui posso ordinare n oggetti $P(n,n) = n!$

R-PERMUTAZIONI: scelgo r oggetti da n e li ordino (r -sequenza senza ripetizione)

$P(n,r) = n!/(n-r)!$

R-COMBINAZIONI: scelgo r oggetti da n (selezione non ordinata) $C(n,r) = n!/(n-r)!$

= **coefficiente binomiale**

PERMUTAZIONI: sono tutti i modi in cui posso ordinare n oggetti $P(n,n) = n!$

R-PERMUTAZIONI: scelgo r oggetti da n e li ordino (r -sequenza senza ripetizione)

$P(n,r) = n!/(n-r)!$

R-COMBINAZIONI: scelgo r oggetti da n (selezione non ordinata) $C(n,r) = n!/(n-r)!$

$$P(n, n) = n! \quad C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad C(n, r) = C(n, n-r)$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$$

TEOREMA

Se ho n oggetti, con r_i di tipo i , dove $n = r_1 + \dots + r_m$, allora il num di disposizioni distinte di questi n oggetti è $P(n; r_1, \dots, r_m) = n!/(r_1! \dots r_m!)$

$$P(n, r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_m!}$$

TEOREMA

Il numero di selezioni con ripetizione di r oggetti scelti tra n tipi di oggetti è $C(r + n - 1, r)$

DISTRIBUZIONE DI OGGETTI DISTINTI

= arrangiamenti

(1) Distribuzione di r oggetti distinti in n scatole. n^r

(2) Se r_i oggetti devono andare nella scatola i , con $1 \leq i \leq |n|$, allora ci sono

$P(r, r_1, r_2, \dots, r_n)$ distribuzioni.

DISTRIBUZIONE DI OGGETTI IDENTICI

= selezione

Distribuire r oggetti identici in n scatole differenti è equivalente a scegliere un sottoinsieme non ordinato di r nomi di scatola con ripetizione, fra le n scatole. Perciò le distribuzioni degli r oggetti identici sono $C(r+n-1, r) = (r+n-1)!/r!(n-1)!$

SELEZIONE CON RIPETIZIONE (forme equivalenti)

- Il numero di modi di selezionare r oggetti con ripetizione da n diversi tipi di oggetti.
- Il numero di modi di distribuire r oggetti identici in n scatole distinte.
- Il numero di soluzioni intere non negative a $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$

TEOREMA BINOMIALE

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k \quad (1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots + \binom{r}{k}x^k + \dots + \binom{r}{n}x^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

RELAZIONI DI RICORRENZA

È una formula ricorsiva che esprime il termine n -esimo di una successione in relazione ai precedenti. Si dice di ordine r se il termine n -esimo è espresso in funzione al più dei termini $(n-1)$ -esimo, ..., $(n-r)$ -esimo. Una soluzione delle relazioni di ricorrenza è una successione di valori complessi, che verifica la relazione.

LINEARI OMOGENEE

È una relazione del tipo $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$

soluzione proposta $\alpha^n = c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \alpha^{n-2} + \dots + c_r \alpha^{n-r}$

$\alpha^r = c_1 \alpha^{r-1} + c_2 \alpha^{r-2} + \dots + c_r$

Equazione caratteristica: $\alpha^r - c_1 \alpha^{r-1} - c_2 \alpha^{r-2} - \dots - c_r = 0$

$a_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_r \alpha_r^n$ (generale?)

Nota: se la molteplicità è m , α^n , $n\alpha^n$, $n^2\alpha^n$, ..., $n^{(m-1)}\alpha^n$

4 molteplicità 2 4 molteplicità 3

$a_n = A_1 4^n + A_2 n 4^n$ $a_n = A_1 4^n + A_2 n 4^n + A_3 n^2 4^n$

LINEARI NON OMOGENEE

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n) = a_0 + \sum_{i=1}^n f(i)$$

$f(n)$	soluzione particolare $p(n)$
B	B
dn	$B_1 n + B_0$
dn^2	$B_2 n^2 + B_1 n + B_0$
ed^n	B^n

DIVIDE AND CONQUER

$a_n = c a_{n/2} + f(n)$ (con n pari).1)

c	$f(n)$	a_n
$c = 1$	d	$d \lfloor \log_2 n \rfloor$
$c = 2$	d	$An - d$
$c > 2$	dn	$An^{\log_2 c} + \left(\frac{2d}{2-c} \right) n$
$c = 2$	dn	$dn(\log_2 n + A)$

CAMPIONAMENTO

Urna contenente n palline, distinguibili o distinguibili a gruppi. Vengono fatte r estrazioni con o senza reinserimento. Interessa contare quante sono le possibili sequenze di r estrazioni. Si può contare in due modi: tenendo in considerazione l'ordine di apparizione delle palline (**disposizioni**) oppure senza tenere l'ordine in considerazione (**combinazioni**).

Problema I

- n palline distinte nell'urna
- r estrazioni con reinserimento
- contare le disposizioni (conta l'ordine di estrazione)
- soluzione: n^r

Nota bene: in questo caso non vi sono vincoli su n e r

Esempio. Totocalcio : contare il numero di schedine giocabili. Una giocata si

modella con un'urna contenente $n = 3$ palline 1, X, 2, dalla quale si estrae $r = 13$ volte, con reinserimento. Ad ogni disposizione delle palline estratte corrisponde una schedina giocabile.

Problema II

- n palline distinte nell'urna (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r estrazioni senza reinserimento
- contare le disposizioni (conta l'ordine di estrazione)
- soluzione: $n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$

Nota bene: in questo caso $r \leq n$

$P(n, r)$

Esempio. Corsa campestre, partecipano 10 atleti. In quanti modi diversi possono essere assegnate le 3 medaglie d'oro, d'argento e di bronzo? L'urna contiene $n = 10$ palline distinguibili (gli atleti), e si effettuano $r = 3$ estrazioni senza reinserimento. Contare le risultanti disposizioni significa contare i possibili ordini di arrivo dei primi 3.

Problema Ila

Nota bene: in questo caso $r = n$

allora le disposizioni si dicono **permutazioni**

soluzione: $n!$

$P(n, n)$

Esempio. Anagrammi della parola MILANO. L'urna contiene $n = 6$ palline distinguibili (le lettere A, I, L, M, N, O) che vengono estratte, senza reinserimento, fino a vuotare l'urna. Ad ogni disposizione delle palline corrisponde uno dei possibili anagrammi.

Problema III

- n palline distinte nell'urna (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r estrazioni senza reinserimento
- contare le combinazioni (NON conta l'ordine di estrazione)

soluzione: $\binom{n}{r}$

Nota bene: in questo caso $r \leq n$

Esempio. Gioco del lotto. Ogni settimana a Venezia vengono estratte $r = 5$ palline, una cinquina, da un'urna contenente $n = 90$ palline distinguibili, numerate da 1 a 90. Nel gioco del lotto si scommette sulla combinazione estratta. Contare quante sono le possibili cinquine.

Problema IIIa

- n palline nell'urna, distinguibili a gruppi. n_1, n_2, \dots, n_k le numerosità dei k gruppi, la cui somma è n .
- $r = n$ estrazioni senza reinserimento
- contare le disposizioni distinguibili

soluzione: $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Nota bene: in questo caso $r = n$

Esempio. Anagrammi della parola MISSISSIPPI. L'urna contiene $n = 11$ palline in $k = 4$ gruppi, M,I,S,P, con $n_M = 1, n_I = 4, n_S = 4, n_P = 2$. Il numero degli anagrammi in questo caso non è $11!$, come suggerirebbe l'esempio del Problema 2, poiché la presenza di lettere ripetute rende alcune delle disposizioni indistinguibili tra loro.

Problema IV

- n palline distinte nell'urna (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r estrazioni con reinserimento
- contare le combinazioni (NON conta l'ordine di estrazione)

soluzione: $\binom{n+r-1}{r}$

Nota bene: in questo caso non ci sono vincoli su n e r

Esempio. Lancio 3 dadi identici. Quante sono le possibili combinazioni osservabili? In questo caso modelliamo con un'urna contenente $n = 6$ palline (numerate da 1 a 6) e contiamo le possibili combinazioni di $r = 3$ estrazioni con reinserimento, poiché ogni dado può mostrare una qualunque faccia, indipendentemente dal risultato degli altri due. Usando la formula qui sopra verificate che le combinazioni possibili sono 56.

ALLOCAZIONE

n scatole distinte. r gettoni distinguibili o identici tra di loro. Gli r gettoni vanno inseriti (allocati) nelle scatole rispettando certi vincoli. Tipicamente ogni scatola può

contenere un numero di gettoni nell'intervallo $[0, r]$, oppure ogni scatola può contenere solo 0 o 1 gettoni. Interessa contare le possibili allocazioni di gettoni nelle scatole.

Problema I

- n scatole distinte (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r gettoni distinguibili
- nessun vincolo di riempimento (ogni scatola può contenere da 0 a r gettoni)

Nota bene: in questo caso non ci sono vincoli su r ed n

Esempio: Schedina del Totocalcio. Si modella con $n = 3$ scatole (contrassegnate 1, X, 2), e $r = 13$ gettoni distinguibili (le partite di cui si deve pronosticare il risultato). Ogni allocazione dei gettoni nelle scatole corrisponde ad una giocata possibile.

soluzione: n^r

Problema II

- n scatole distinte (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r gettoni distinguibili
- ogni scatola può contenere 0 o 1 gettoni

Nota bene: in questo caso $r \leq n$

Esempio: Corsa campestre, vedi Problema II. Questo caso si modella con $n = 10$ scatole, contrassegnate con i nomi dei 10 atleti, e $r = 3$ gettoni (contrassegnati 1, 2, 3). Ogni allocazione dei gettoni nelle scatole rappresenta una possibile terna ordinata di vincitori.

soluzione: $P(n, r)$

Problema Ila

È il caso particolare del Problema II con $r = n$. In questo caso, terminata l'allocazione, ogni scatola conterrà esattamente 1 gettone.

Esempio: Anagrammi della parola MILANO. Le scatole sono $n = 6$, contrassegnate 1, 2, 3, 4, 5, 6, e rappresentano le posizioni delle lettere della parola che si andrà a comporre. I gettoni sono $r = n = 6$, contrassegnati A, I, L, M, N, O e rappresentano le lettere a disposizione.

soluzione: $n! = P(n, n)$

Problema III

- n scatole distinte (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r gettoni identici
- ogni scatola può contenere 0 o 1 gettoni

Nota bene: in questo caso $r \leq n$

Esempio: Gioco del Lotto, come nel Problema III. Il modello di allocazione consiste di $n = 90$ scatole (contrassegnate da 1 a 90) e di $r = 5$ gettoni identici, con vincolo di allocazione 0 or 1 gettoni in ogni scatola.

soluzione: $C(n, r)$

Problema IIIa

- n scatole distinte (ad esempio numerate da 1 ad n)
- $r = n$ gettoni distinguibili

la scatola i deve contenere esattamente n_i gettoni, con $\sum_{i=1}^k n_i = n$

Esempio: Anagrammi della parola MISSISSIPPI. Il modello di allocazione consiste di $n = 4$ scatole, contrassegnate M,I,S,P, e di $r = 11$ gettoni, contrassegnati 1, 2, ..., 11. I gettoni corrispondono alle posizioni delle lettere nella parola che si andrà a comporre. Ad ogni allocazione corrisponde uno degli anagrammi distinguibili.

Soluzione: $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Problema IV

- n scatole distinte (ad esempio numerate da 1 ad n)
- r gettoni identici
- nessun vincolo di riempimento (ogni scatola può contenere da 0 a r gettoni)

Nota bene: in questo caso non ci sono vincoli su n e r .

Esempio: Lancio 3 dadi identici. Quante sono le possibili combinazioni osservabili? In questo caso modelliamo con $n = 6$ scatole, contrassegnate 1, 2, 3, 4, 5, 6, e con $r = 3$ gettoni contrassegnati Lancio1, Lancio2, Lancio3.

Soluzione: $\binom{n+r-1}{r}$